Exercice 1 : .... 5 points

1. Calculons les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 + x^2 - 7x + 6) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = 2(-\infty)^3 = -\infty$ (1 pt)

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4-5x}{3x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-5x}{3x} = \dfrac{-5}{3}$ (1 pt)

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x+1)(4x^2 + x - 7) = \lim\limits_{x \to -\infty} (5x)(4x^2) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$ (1 pt)

2. Calculons la fonction dérivée f' de f dans les cas suivants :

a. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$

$f'(x) = 9x^2 - 4x + 1$ (1 pt)

b. $f(x) = \dfrac{-3x^2+4}{3x-3}$

$$f'(x) = \frac{(-6x)(3x-3) - 3(-3x^2+4)}{(3x-3)^2} = \frac{-9x^2+18x-12}{(3x-3)^2}$$

$f'(x) = \dfrac{-9x^2+18x-12}{(3x-3)^2}$ (0,5 pt)

c. $f(x) = (3x^2 - x + 2)^3$

$f'(x) = 3(6x-1)(3x^2-x+2)^2$ (0,5 pt)

Exercice 2: .... 5 points

Monsieur Keïta, un commerçant, en 2020 place une somme de 500 000 francs dans une caisse d'épargne, qui augmente de 8% d'année en année. C_n le capital en l'an $(2020+n)$.

En 2020 on a : $C_0 = 500000$

a. Calculons C_1, C_2 et C_3.

$C_1 = (1+8\%)C_0 = 1{,}08 \times 500000 = 540000$ (1 pt)

$C_2 = (1+8\%)C_1 = 1{,}08 \times 540000 = 583200$ (1 pt)

$C_3 = (1+8\%)C_2 = 1{,}08 \times 583200 = 629856$ (1 pt)

b. Pour tout entier naturel n, exprimons C_{n+1} en fonction de C_n , puis C_n en fonction de n.

$C_{n+1} = 1{,}08C_n$ (0,5 pt)

La suite C_n est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 500000$ et de raison $q = 1{,}08$ d'où $C_n = C_0 \times q^n = 500000 \times 1{,}08^n$ (0,5 pt)

c. L'année à la quelle le capital doublera.

$C_n = 2 \times 500000 \Leftrightarrow 500000 \times 1{,}08^n = 1000000$

A l'aide d'un tableau de valeur

n	1	2	3					9	10
C_n	540000	583200	629856					999502	1079462

$n = 10$ (1 pt)

Problème : .... 10 points

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{x^2+7x-3}{x+4}$.

1. Calculons le domaine de définition de g.

$D_g = \{x \in \mathbb{R}; x+4 \neq 0\}$

Posons $x+4=0$

$x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$

$D_g = \mathbb{R} - \{-4\} =]-\infty; -4[\cup]-4; +\infty[$ **(2 pts)**

2. Déterminons les nombres réels a, b et c pour lesquels on a : $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+4}$

Méthode 1 : Division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} x^2+7x-3 & x+4 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2-4x} & x+3 \\ 3x-3 & \\ \underline{-3x-12} & \\ 0-15 & \end{array}$$

$a=1$; $b=3$ et $c=-15$ **(1,5 pt)**

Méthode 2 : Tableau d'Horner

	1	7	-3
-4	$\downarrow$	-4	-12
	1	3	-15

$a=1$; $b=3$ et $c=-15$

Méthode 3 : Les coefficients indéterminés

$$g(x) = ax+b+\frac{c}{x+4} = \frac{ax^2+4ax+bx+4b+c}{x+4} = \frac{ax^2+x(4a+b)+4b+c}{x+4}$$

Par identification on a:

$$\begin{cases} a=1 \\ 4a+b=7 \\ 4b+c=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=-15 \end{cases}$$

3. Montrons que la droite (D) d'équation : $y=x+3$ est asymptote à la courbe (C_g) de g, puis précisons l'équation de l'autre asymptote.

La droite (D) d'équation : $y=x+3$ est asymptote à la courbe (C_g) de g si et seulement si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-y)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+3-\frac{15}{x+4}-x-3\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{15}{x+4}\right) = \frac{-15}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+3-\frac{15}{x+4}-x-3\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{15}{x+4}\right) = \frac{-15}{-\infty} = 0$$

Alors la droite (D) d'équation $y=x+3$ est asymptote à la courbe (C_g) de g.

(0,75 pt)

$$\lim_{x\to-4} g(x) = \frac{(-4)^2+7(-4)-3}{-4+4} = \frac{-15}{0}$$

Tableau de signe de $x+4$

x	$-\infty$ -4 $+\infty$
$x+4$	$-$ 0 $+$

$$\lim_{x\to -4^-} g(x) = \frac{-15}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -4^+} g(x) = \frac{-15}{0^+} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $x = -4$ est asymptote verticale à la courbe (C_g) de g.

(0,75 pt)

4. a. Calculons $g'(x)$ puis étudions son signe :

$$g'(x) = \frac{(2x+7)(x+4) - 1(x^2+7x-3)}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x+31}{(x+4)^2} \quad \textbf{(1 pt)}$$

Étudions le signe de $g'(x)$

$\forall\ x \in D_g$, $(x+4)^2 > 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que $(x^2+8x+31)$

Posons : $x^2+8x+31 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(1)(31) = -60 < 0$

Tableau de signe de $g'(x)$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	||	$+$

$\forall\ x \in D_g$, $g'(x) > 0$ **(1 pt)**

b. Dressons le tableau des variations de g.

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	||	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

(1 pt)

c. Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C_g) de g en son point d'abscisse $x_0 = -1$.

$(T) : y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0) = g'(-1)(x+1) + g(-1)$

Calculons $g'(-1)$ et $g(-1)$.

$$g'(-1)=\frac{(-1)^2+8(-1)+31}{(-1+4)^2}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$$

$$g(-1)=\frac{(-1)^2+7(-1)-3}{-1+4}=\frac{-9}{3}=-3$$

$$y=\frac{8}{3}x+\frac{8}{3}-3=\frac{8}{3}x-\frac{1}{3}\Longrightarrow (T): y=\frac{8}{3}x-\frac{1}{3}\quad \textbf{(1 pt)}$$