

Exercice 1 : **5 points**

1. Calculons les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x^2 - 7x + 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = 2(-\infty)^3 = -\infty$ (1 pt)

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-5x}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{3x} = \frac{-5}{3}$ (1 pt)

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x+1)(4x^2+x-7) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x)(4x^2) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$ (1 pt)

2. Calculons la fonction dérivée f' de f dans les cas suivants :

a. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$
 $f'(x) = 9x^2 - 4x + 1$ (1 pt)

b. $f(x) = \frac{-3x^2 + 4}{3x - 3}$
 $f'(x) = \frac{(-6x)(3x-3) - 3(-3x^2+4)}{(3x-3)^2} = \frac{-9x^2 + 18x - 12}{(3x-3)^2}$
 $f'(x) = \frac{-9x^2 + 18x - 12}{(3x-3)^2}$ (0,5 pt)

c. $f(x) = (3x^2 - x + 2)^3$
 $f'(x) = 3(6x - 1)(3x^2 - x + 2)^2$ (0,5 pt)

Exercice 2 : **5 points**

Monsieur Keïta, un commerçant, en 2020 place une somme de 500 000 francs dans une caisse d'épargne, qui augmente de 8% d'année en année. C_n le capital en l'an $(2020 + n)$.

En 2020 on a : $C_0 = 500000$

a. Calculons C_1 , C_2 et C_3 .

$C_1 = (1 + 8\%)C_0 = 1,08 \times 500000 = 540000$ (1 pt)

$C_2 = (1 + 8\%)C_1 = 1,08 \times 540000 = 583200$ (1 pt)

$C_3 = (1 + 8\%)C_2 = 1,08 \times 583200 = 629856$ (1 pt)

b. Pour tout entier naturel n , exprimons C_{n+1} en fonction de C_n , puis C_n en fonction de n .

$C_{n+1} = 1,08C_n$ (0,5 pt)

La suite C_n est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 500000$ et de raison $q = 1,08$ d'où $C_n = C_0 \times q^n = 500000 \times 1,08^n$ (0,5 pt)

c. L'année à laquelle le capital doublera.

$C_n = 2 \times 500000 \Leftrightarrow 500000 \times 1,08^n = 1000000$

A l'aide d'un tableau de valeur

n	1	2	3					9	10
C_n	540000	583200	629856					999502	1079462

$n = 10$ (1 pt)

Problème : **10 points**

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = \frac{x^2 + 7x - 3}{x + 4}$.

1. Calculons le domaine de définition de g .

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}; x + 4 \neq 0\}$$

Posons $x + 4 = 0$

$$x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{-4\} =]-\infty; -4[\cup]-4; +\infty[\quad (2 \text{ pts})$$

2. Déterminons les nombres réels a , b et c pour lesquels on a : $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+4}$

Méthode 1 : Division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 7x - 3 & x + 4 \\ \underline{-x^2 - 4x} & x + 3 \\ 3x - 3 & \\ \underline{-3x - 12} & \\ 0 - 15 & \end{array}$$

$$a = 1 ; b = 3 \text{ et } c = -15 \quad (1,5 \text{ pt})$$

Méthode 2 : Tableau d'Horner

	1	7	-3
-4	↓	-4	-12
	1	3	-15

$$a = 1 ; b = 3 \text{ et } c = -15$$

Méthode 3 : Les coefficients indéterminés

$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x+4} = \frac{ax^2 + 4ax + bx + 4b + c}{x+4} = \frac{ax^2 + x(4a+b) + 4b+c}{x+4}$$

Par identification on a:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 7 \\ 4b + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -15 \end{cases}$$

3. Montrons que la droite (D) d'équation : $y = x + 3$ est asymptote à la courbe (C_g) de g , puis précisons l'équation de l'autre asymptote.

La droite (D) d'équation : $y = x + 3$ est asymptote à la courbe (C_g) de g si et seulement

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - y) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 3 - \frac{15}{x+4} - x - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{15}{x+4} \right) = \frac{-15}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 3 - \frac{15}{x+4} - x - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{15}{x+4} \right) = \frac{-15}{-\infty} = 0$$

Alors la droite (D) d'équation $y = x + 3$ est asymptote à la courbe (C_g) de g .

(0,75 pt)

$$\lim_{x \rightarrow -4} g(x) = \frac{(-4)^2 + 7(-4) - 3}{-4 + 4} = \frac{-15}{0}$$

Tableau de signe de $x + 4$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} g(x) = \frac{-15}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} g(x) = \frac{-15}{0^+} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $x = -4$ est asymptote verticale à la courbe (C_g) de g .

(0,75 pt)

4. a. Calculons $g'(x)$ puis étudions son signe :

$$g'(x) = \frac{(2x+7)(x+4) - 1(x^2+7x-3)}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x+31}{(x+4)^2} \quad \textbf{(1 pt)}$$

Étudions le signe de $g'(x)$

$\forall x \in D_g, (x+4)^2 > 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que $(x^2+8x+31)$

Posons : $x^2+8x+31=0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(1)(31) = -60 < 0$$

Tableau de signe de $g'(x)$

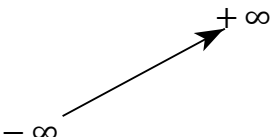
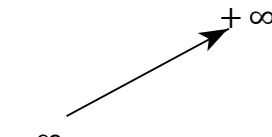
x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$

$\forall x \in D_g, g'(x) > 0$ **(1 pt)**

- b. Dressons le tableau des variations de g .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$
$g(x)$	$-\infty$ 		$+\infty$ 

(1 pt)

- c. Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C_g) de g en son point d'abscisse $x_0 = -1$.

$$(T) : y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0) = g'(-1)(x + 1) + g(-1)$$

Calculons $g'(-1)$ et $g(-1)$.

$$g'(-1) = \frac{(-1)^2 + 8(-1) + 31}{(-1+4)^2} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

$$g(-1) = \frac{(-1)^2 + 7(-1) - 3}{-1+4} = \frac{-9}{3} = -3$$

$$y = \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} - 3 = \frac{8}{3}x - \frac{1}{3} \Rightarrow (T) : y = \frac{8}{3}x - \frac{1}{3} \quad \textbf{(1 pt)}$$